

EEM212 - SAYISAL DEVRE TASARIMI DERS NOTLARI

DERS NOTU 6: ARDIŞIL DEVRELER II: ANALİZ

Dr. İsmail Öztürk *

<ismail.ozturk@amasya.edu.tr>

İçindekiler

1 Senkron Ardışıl Devre Analizi	1
1.1 D Flip Flop Analizi	2
1.2 JK Flip Flop Analizi	6
1.3 T Flip Flop Analizi	8
2 Sonlu Durum Makineleri	11
2.1 Mealy Modeli	12
2.2 Moore Modeli	12

1 Senkron Ardışıl Devre Analizi

Bir önceki ders notunda asenkron devrelerin analizinin nasıl yapıldığını görmüştük. Asenkron devre analizinde öncelikle yapmamız gereken devreye ait **fark denklemini** belirlemektir. Senkron devrelerde de devrenin analizini yaparken belirlememiz gereken ilk şey mevcut ve sonraki durum arasındaki ilişkiyi veren fark denklemini belirlemektir. Bu fark denklemleri hafıza elemanlarının önceki ve sonraki durumlarını

* Amasya Üniversitesi Teknoloji Fakültesi EEM Bölümü
Daha fazla bilgi için: <https://iozturk.com>

belirlediğinden, bu denklemler aynı zamanda **durum denklemi** olarak da adlandırılmaktadır.

Durum denklemlerini elde ettikten sonra devrenin nasıl çalışacağını belirlemek için tıpkıkombinasyonel devre analizinde yaptığımız gibi bir doğruluk tablosu oluşturmamız gerekir. Bunun için elde etmiş olduğumuz durum denklemlerini kullanarak ardışıl devreye ait bir doğruluk tablosu oluştururuz. Kombinasyonel devrelerde olduğunun aksine bu doğruluk tablosu mevcut ve sonraki durumlar arasındaki ilişkiyi de gösterdiğinden bu tür tablolara **durum tablosu** adı verilir.

Kombinasyonel devre analizi yapıyor olsaydık doğruluk tablosunu belirlemek analizimiz için son adım olacaktı. Fakat doğruluk tablosundan önceki / sonraki durum ilişkisini çıkarmak çok kolay olmadığından, ardışıl ilişkiyi daha net görebilmemizi sağlayacak bir başka gösterim şekli kullanırız. Bu gösterimde devrenin alabileceği tüm durumlar ayrı ayrı yuvarlak şekiller içinde sembolize edilirken, önceki / sonraki durum ilişkisi oklarla gösterilir. Bu gösterime **durum diyagramı** adı verilmektedir. Durum diyagramı ile devrenin ardışıl ilişki durumu tablosuna göre daha basit şekilde anlaşılır ve bu diyagramı oluşturduktan sonra analiz tamamlanır.

Buna göre, analiz yaparken takip edilen temel adımlar şu şekildedir:

1. Durum denklemlerinin elde edilmesi
2. Durum tablosunun oluşturulması
3. Durum diyagramının çizilmesi

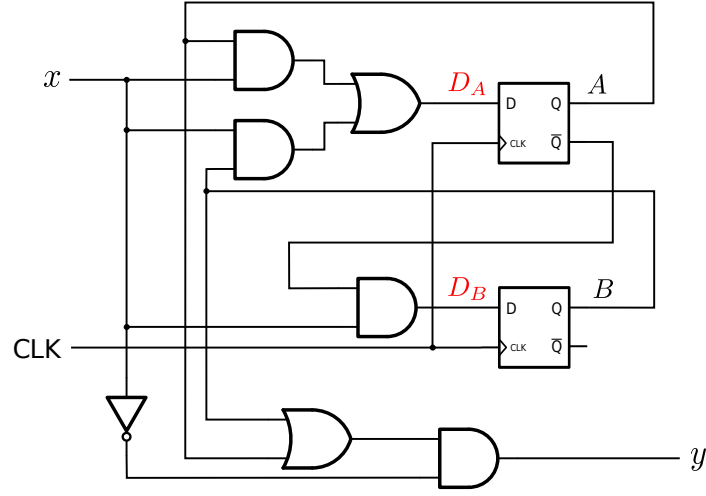
Asenkron devre analizinde olduğunun aksine, senkron devre analizinde durum denklemlerini elde etmek son derece kolaydır. Tek yapmamız gereken her bir hafıza elemanının çıkışı mevcut durum olarak kabul ederek, bu mevcut durumun kombinasyonel devreler üzerinden geribesleme hattıyla tekrar hafıza elemanının girişlerine ne şekilde geri döndüğünü belirlemektir. Senkron devrede tüm hafıza elemanları aynı anda güncellendiğinden, bu giriş değerleri hafıza elemanının sonraki durumunun ne olacağını belirleyecektir. Durum denklemi de bu ilişkiye göre belirlenir. Şimdi farklı flip floplar için bu denklemlerin nasıl elde edilip, analizlerin nasıl yapılacağını inceleyelim.

1.1 D Flip Flop Analizi

Önceki ders notundan hatırlayacağımız üzere D flip flopun girişi, flip flopun sonraki değerini vermektedir. Yani flip flopun girişi D ve çıkışı Q olmak üzere, flip flopun önceki ve sonraki durumları arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$Q_{n+1} = D \quad (1)$$

Buna flip flopun **karakteristik denklemi** adı verilmektedir. Dolayısıyla, D flip flop kullanan bir senkron devrede durum denklemini bulmak için yapmamız gereken Eşitlik 1'de D girişinin ne olacağını belirlemektir. Örnek olarak Şekil 1'deki devreyi inceleyelim:



Şekil 1: D flip flop tabanlı senkron ardışıl devre.

Bu devrede üstteki ve alttaki flip flopların çıkışları sırasıyla A ve B ile temsil edilmektedir. Devrenin girişi x olup çıkışı y 'dir. Flip flopların mevcut durumları A_n ve B_n ile etiketlenirse D_A ve D_B girişleri Eşitlik 1'e göre sırasıyla A_{n+1} ve B_{n+1} olacaktır. Buna göre, A_n ve B_n değerlerini geribesleme hatları üzerinden takip edersek aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= D_A = A_n x + B_n x \\ B_{n+1} &= D_B = A'_n x \end{aligned}$$

Benzer şekilde çıkış eşitliğini

$$y = (A_n + B_n)x'$$

şeklinde elde ederiz. Durum denklemlerini ifade ederken mevcut durumları ifade etmek için A_n ve B_n kullanmak yerine kısaca A ve B diyebiliriz. Bu durumda fark denklemleri kısaca aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= Ax + Bx \\ B_{n+1} &= A'x \\ y &= (A + B)x' \end{aligned} \tag{2}$$

Durum tablosu içinse devrenin giriş / çıkışları ile hafıza elemanlarının mevcut ve sonraki durumuna göre aşağıdaki tablo doldurulmalıdır:

Şimdiki Durum		Giriş	Sonraki Durum		Çıkış
A	B	x	A	B	y
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Tabloda sonraki durumlar içinde A_{n+1} , B_{n+1} yerine kısaca A ve B yazdığımıza dikkat etmeniz gerekir. Buna göre, tablo Eşitlik 2'deki durum denklemleri kullanılarak doldurulur. Tablonun doldurulmuş hali aşağıdaki gibidir:

Şimdiki Durum		Giriş	Sonraki Durum		Çıkış
A	B	x	A	B	y
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0

Durum diyagramını yukarıdaki tabloyu kullanarak oluşturmak mümkündür. Fakat, bu tabloyu girişin farklı değerleri için aşağıdaki gibi ifade etmek, durum diyagramını oluşturmayı daha da kolaylaştıracaktır:

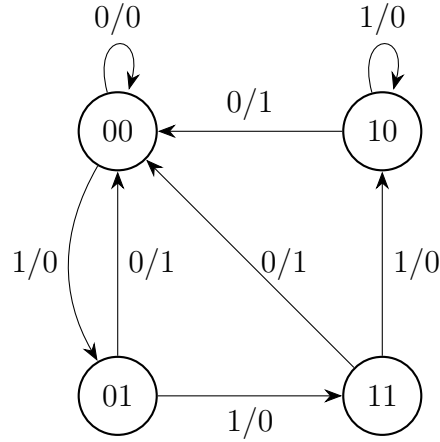
Şimdiki Durum		Sonraki Durum		Çıkış	
		$x = 0$	$x = 1$	$x = 0$	$x = 1$
A	B	A	B	y	y
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	1	0

Bu durum tablosundan devrenin 00, 01, 10 ve 11 olmak üzere toplam 4 adet durumu olduğunu görmekteyiz. Bu durumlar arasındaki geçiş tablosundan net bir şekilde görülmektedir. Mesela, mevcut durum 10 iken giriş $x = 0$ ise sonraki durum 00 ve çıkış $y = 1$ olacaktır.

Genel olarak n tane hafıza elemanına sahip olan bir ardışıl devrenin toplam 2^n farklı durumu olacaktır.

Ardışıl devre bu durumların hepsini kullanmak zorunda değildir. Kullanılmayan durumların ne yapılacağı tasarım kısmında anlatılacaktır.

4 farklı durumu Şekil 2'deki gibi yuvarlak şekiller içinde ifade edersek, önceki ve sonraki durumlar arasındaki geçişleri oklarla gösterebiliriz. Bu okların yanındaki 1/0 gibi değerler ise / sembolüyle ayrılmış sırasıyla x girişini ve y çıkışını temsil etmektedir. Buna göre, 1/0 ifadesi $x = 1$, $y = 0$ anlamına gelmektedir. Şekil 2'deki durumlar arası geçişi gösteren diyagram elde etmediğimiz durum diyagramıdır.



Şekil 2: Şekil 1'deki devrenin durum diyagramı.

Durum diyagramı bize giriş değerlerine karşılık sonraki durum ve çıkışların ne olacağını göstermektedir. Mesela, $A = 1$ ve $B = 1$ olsun. Yani mevcut durum 11 olsun. Diyagramda 11 yuvarlağına baktığımızda 00 ve 10 durumlarına giden iki tane okun çıktığını görürüz. Bu okların üstünde sırasıyla 0/1 ve 1/0 yazmaktadır. Okların üstündeki bu değerlerden çıkışı ifade eden değerler (/ sembolünün sağındaki değerler) mevcut durumdayken çıkışın ne olacağını belirler. Buna göre,

- 0/1 değeri 11 durumundayken $x = 0$ ise çıkışın 1 olacağını;
- 1/0 değeri 11 durumundayken $x = 1$ ise çıkışın 0 olacağını belirtir.

Yani çıkışları belirlerken okların üstündeki değerler bize mevcut çıkış değerini verir. Fakat, okların uzandığı durumlar D flip flopların alacağı sonraki değerlerdir. Dolayısıyla, yine 11 durumu için,

Okların üstündeki çıkış değerleri mevcut çıkış değeridir. Sonraki çıkış değerleri değildir. Fakat, okların kendisi sonraki durumu göstermektedir. Bu ikisini birbirine karıştırmamanız lazım.

- 0/1 değeri 11 durumundayken $x = 0$ için sonraki durumun 00 olacağını;
- 1/0 değeri 11 durumundayken $x = 1$ ise sonraki durumun 10 olacağını belirtir.

Durum diyagramındaki diğer durumlar da benzer şekilde okunur. Durum tablosu ile durum diyagramını incellerseniz ikisinin de aslında aynı şeyleri ifade ettiklerini fark edersiniz.

Durum diyagramını elde ettikten sonra ardışıl devrenin analizi tamamlanmış olur. Artık bu diyagramdan devrenin nasıl çalıştığını, ardışıl ilişkilerin ne olduğunu (yani farklı giriş değerlerinin devreyi hangi sonraki durumlara sürükleyeceğini) tamamen öngörebilirsiniz.

1.2 JK Flip Flop Analizi

Bir önceki ders notunda JK flip flopu $D = JQ' + K'Q$ kombinasyonel devre bağlantısı ile (Q_n yerine kısaca Q kullanıyoruz) D flip flop kullanarak elde edebileceğimizi görmüştük. D flip flop için $Q_{n+1} = D$ olduğundan, JK flip flopu girişleri ve sonraki durumu arasında aşağıdaki gibi bir ilişki olmalıdır:

$$Q_{n+1} = JQ' + K'Q \quad (3)$$

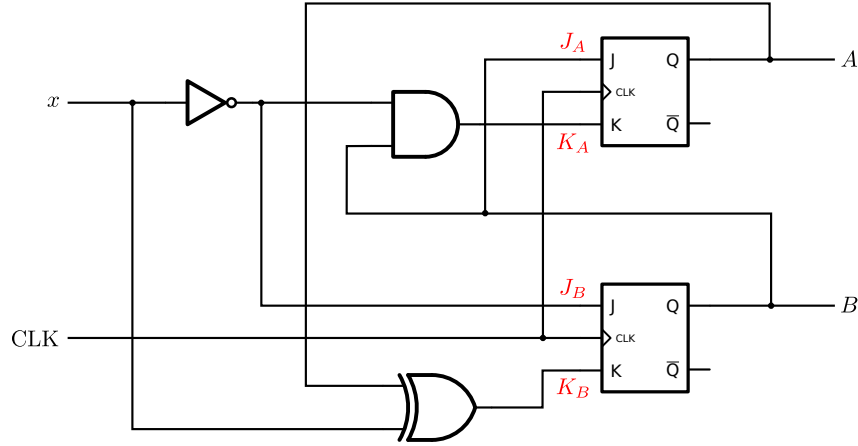
Eşitlik 3'ün nasıl elde edileceği tasarım kısmında açıklanacaktır.

Başka bir deyişle JK flip flopu karakteristik denklemi Eşitlik 3'tür. Buradan görüldüğü üzere JK flip flop için sonraki durum ilişkisi D flip flopunki gibi doğrudan değildir. Sonraki durumu belirlemek için J ve K girişlerinin mevcut değerini bulduktan sonra ya yukarıdaki karakteristik denklemi ya da JK flip flopa ait doğruluk tablosunu kullanmamız gerekir. Hatırlayacağınız üzere JK flip flopu doğruluk tablosu Tablo 1'deki gibiydi:

J	K	Q_{n+1}
0	0	Q_n
0	1	0
1	0	1
1	1	Q'_n

Tablo 1: JK flip flop doğruluk (durum) tablosu.

Örnek olarak Şekil 3'deki devrenin analizini yapalım. Durum denklemlerini belirleyebilmek için ilk yapmamız gereken şey flip flopların girişlerinin kombinasyonel devre eşitliklerini bulmak. Bunu yaptığımızda aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:



Şekil 3: JK flip flop tabanlı senkron ardışıl devre.

$$\begin{aligned}
 J_A &= B \\
 K_A &= Bx' \\
 J_B &= x' \\
 K_B &= A \oplus x
 \end{aligned} \tag{4}$$

Bunları A ve B flip floplarının karakteristik denklemleri olan

$$\begin{aligned}
 A_{n+1} &= J_A A' + K'_A A \\
 B_{n+1} &= J_B B' + K'_B B
 \end{aligned}$$

denklemleri ile birleştirirsek devrenin durum denklemlerini aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$\begin{aligned}
 A_{n+1} &= BA' + (Bx')'A = A'B + A(B' + x) = A'B + AB' + Ax \\
 B_{n+1} &= x'B' + (A \oplus x)'B = B'x' + (Ax' + A'x)'B = B'x' + B(A' + x')(A + x')
 \end{aligned}$$

Sonuçları düzenlersek durum denklemleri aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{aligned}
 A_{n+1} &= A'B + AB' + Ax \\
 B_{n+1} &= B'x' + A'Bx' + ABx
 \end{aligned} \tag{5}$$

Durum tablosunu oluşturmak için Eşitlik 5'i kullanabilirsiniz. Fakat, Eşitlik 4 ile flip flop girişlerinin değerlerini elde ettikten sonra A_{n+1} ve B_{n+1} değerlerini Tablo 1'i kullanarak belirlemek daha kolay olacaktır. Bunun için öncelikle durum tablosunun J_A , K_A , J_B ve K_B değerlerini mevcut durumlar ve girişlerin farklı kombinasyonları için aşağıdaki gibi buluruz:

Şimdiki Durum		Giriş	Flip Flop Girişleri		Flip Flop Girişleri		Sonraki Durum	
A	B	x	J_A	K_A	J_B	K_B	A	B
0	0	0	0	0	1	0		
0	0	1	0	0	0	1		
0	1	0	1	1	1	0		
0	1	1	1	0	0	1		
1	0	0	0	0	1	1		
1	0	1	0	0	0	0		
1	1	0	1	1	1	1		
1	1	1	1	0	0	0		

Flip flop girişlerini Eşitlik 4'ü kullanarak belirledikten sonra sonraki durumların ne olacağını kolaylıkla belirleyebiliriz. Mesela, ilk satır için mevcut durum $AB = 00$ 'dir. Bu durumda $J_A = 0$, $K_A = 0$ olduğundan A 'nın sonraki değeri önceki değer olan 0; $J_B = 1$, $K_B = 0$ olduğundan B 'nin sonraki değeri 1 olmalıdır. Buna göre, 00 durumunun sonraki durumu $x = 0$ girişi için 01 olmalıdır. Diğer satırları da benzer şekilde doldurduğumuzda durum tablosu aşağıdaki gibi elde edilir:

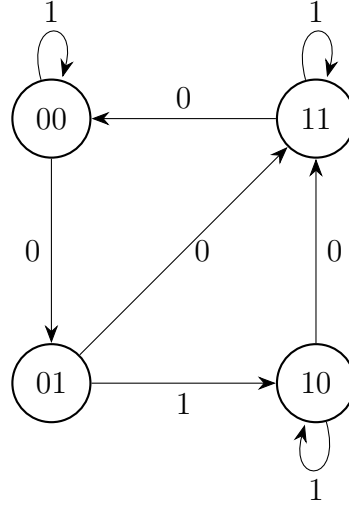
Şimdiki Durum		Giriş	Flip Flop Girişleri		Flip Flop Girişleri		Sonraki Durum	
A	B	x	J_A	K_A	J_B	K_B	A	B
0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1

Durum tablosundan durum diyagramının elde edilmesi tıpkı bir önceki kısımda yaptığımız gibi olacaktır. Tek fark olarak, devrenin çıkışı olmadığı için durumlar arasındaki geçişlerde çıkışı belirten / sembolünü kullanmayız. Buna göre, durum diyagramı Şekil 4'deki gibi elde edilir.

1.3 T Flip Flop Analizi

Eşitlik 6'nın nasıl elde edileceği tasarım kısmında açıklanacaktır.

Yine bir önceki ders notundan T flip flopu D flip flop kullanarak elde etmek için $D = T \oplus Q$ bağlantısı yapmamız gerektiğini görmüştük. D flip flop için $Q_{n+1} = D$



Şekil 4: Şekil 3'deki devreye ait durum diyagramı.

ilişkisini bu bağlantıya uygularsak T flip flopun karakteristik denklemini aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$Q_{n+1} = T \oplus Q = TQ' + T'Q \quad (6)$$

T flip flopa ait doğruluk tablosu ise Tablo 2'deki gibiydi.

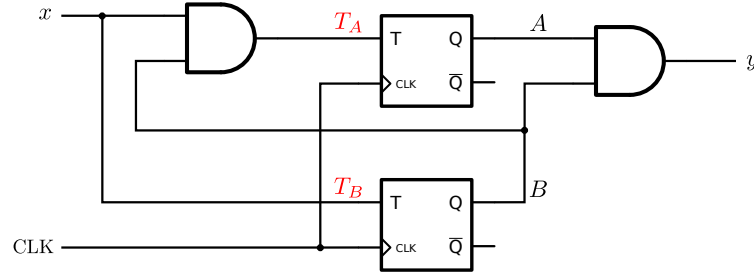
T	Q_{n+1}
0	Q_n
1	Q'_n

Tablo 2: T flip flop doğruluk (durum) tablosu.

Şimdi bu ilişkileri kullanarak Şekil 5'deki devrenin analizini yapalım. Devre son derece basittir. Şekilden $T_A = Bx$, $T_B = x$ ve $y = AB$ olduğunu görürüz. Bu ilişkileri Eşitlik 6'deki karakteristik denkleme uygularsak sonraki durumları aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= BxA' + (Bx)'A = A'Bx + AB' + Ax' \\ B_{n+1} &= xB' + x'B = B \oplus x \end{aligned} \quad (7)$$

Eşitlik 7 devrenin durum denklemleridir. Devrenin durum tablosunu oluşturmak ise JK flip flop analizinde yapıldığı gibidir. Öncelikle mevcut durumlar A , B ile giriş x 'in olası tüm kombinasyonları sıralanır. Ardından T_A ve T_B flip flop kontrol girişlerinin bu kombinasyonlara karşı alacağı değerler tabloya işlenir. Bunu bulduktan sonra ise Tablo 2 veya Eşitlik 7 kullanılarak A ve B 'nin sonraki değerleri hesaplanır. Bunları yaptıktan sonra elde edilen durum tablosu aşağıdaki gibi olmaktadır:

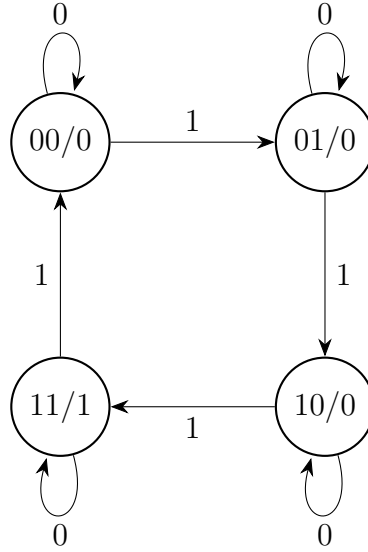


Şekil 5: JK flip flop tabanlı senkron ardışıl devre.

Şimdiki Durum		Giriş	Flip Flop Girişleri		Sonraki Durum		Çıkış
A	B	x	T _A	T _B	A	B	y
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1

Elde ettiğimiz bu durum tablosunu kullanarak da Şekil 6'deki durum diyagramını elde ederiz. Bu durum diyagramında yuvarlak şekiller içerisinde / sembolü ile ayrılmış değerlerin dikkatinizi çekmiş olması lazım. Her bir yuvarlakta / sembolünün solundaki değerler mevcut durumu (AB) belirtirken, / sembolünün sağındaki değer çıkış değerini (y) temsil etmektedir. Peki **niye önceki analizlerde çıkışı okların üzerinde gösterirken bu analizde çıkışı durumların yanında gösterdik?** Aradaki fark bu analizde çıkışın girişlere bağlı olmamasıdır. Yani $y = AB$ olduğu için y çıkışı x girişinden bağımsızdır. Bu nedenle, bir durumdayken x ne olursa olsun çıkış aynı kalacaktır. Bu gibi durumlarda çıkışları oklar üzerinde gösterdiğimizde her iki çıkış oku üzerinde de aynı çıkışı yazmamız gerekir. Bunu yapmak yerine çıkışı durumun yanında Şekil 6'deki gibi ifade etmek daha pratiktir.

Şimdi devrenin çalışmasını inceleyelim. Bu durum diyagramına baktığımızda 00 durumundayken $x = 0$ olduğu müddetçe aynı durumda kalacağımızı görürüz. Bu durumdayken $x = 1$ yapıldığında devre $00 \rightarrow 01 \rightarrow 10 \rightarrow 11$ durumlarına geçiş yapacak ve sadece 11 durumunda çıkış 1 olacaktır. 11 durumunda hala $x = 1$ ise tekrar ilk duruma dönecek ve $x = 0$ yapılanaya kadar aynı davranış tekrar edip duracaktır. Bu çalışma şekli bize devrenin **iki bitlik sayıcı** olduğunu göstermektedir. x girişi say komutu olup $x = 1$ olduğu müddetçe devre sayacaktır (durumların onluk tabanda 0, 1, 2, 3 olduğuna dikkat edin). Çıkış y ise sayma işleminin sona (11 durumuna) geldiğini bildirmekle görevlidir. Sayıcıları ilerleyen derslerde detaylı inceleyeceğiz.



Şekil 6: Şekil 5'deki devreye ait durum diyagramı.

Şimdiye kadar yapmış olduğumuz analizlerde durum diyagramlarını iki farklı şekilde oluşturabileceğimizi gördük. Bu iki farklı durum diyagramı çeşidi Mealy ve Moore makinesi adı verilen tasarım konseptlerine karşılık gelmektedir. Bu tasarım konseptleri sonlu durum makineleri adı verilen daha genel bir matematiksel modele aittir. Elde ettiğimiz durum diyagramlarını daha iyi anlayabilmek için sonraki kısımda sonlu durum makinelerinin ne olduğundan kısaca bahsedeceğiz.

2 Sonlu Durum Makineleri

Sonlu durum makineleri ¹ herhangi bir anda sonlu sayıdaki durumlardan sadece birinde olabilen soyut matematiksel modellerdir. Bu modeller farklı türlerdeki problemleri çözmek için kullanılırlar da en yaygın kullanım alanları dijital sistem tasarımıdır. Çünkü ardışıl devreler ve sonlu durum makineleri arasında yakın bir ilişki vardır. Yukarıdaki analizlerde elde etmiş olduğumuz durum diyagramlarının her biri aslında birer sonlu durum makinesi örneğidir. Otomatlar, trafik ışıkları, asansörler, turnikeler gibi pek çok düzenli çalışma prensibi bir sonlu durum makinesi ile modellenilebilir ve bu sonlu durum makinesi dijital devre olarak gerçekleştirilebilir.

Gerçekleştirim türüne göre sonlu durum makineleri

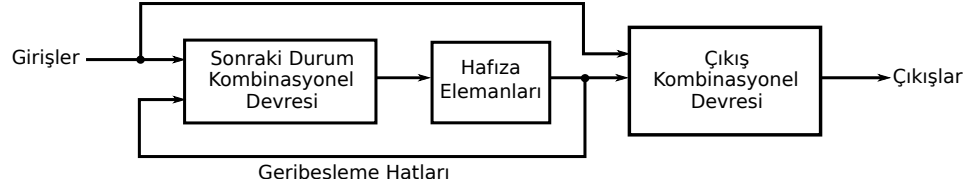
1. Mealy Modeli
2. Moore Modeli

olmak üzere ikiye ayrılır.

¹ing. *Finite State Machine (FSM)*

2.1 Mealy Modeli

Mealy modeli **çıkışların hem mevcut duruma hem de girişlere bağlı olduğu** sonlu durum makinesidir. Mealy modeli ardışıl devrelerin blok diyagramı Şekil 7'deki gibi olacaktır. Görüldüğü üzere Mealy modeli devrelerde çıkışları doğrudan girişlere bağlayan bir hat vardır. Mealy modelinde hafıza elemanı henüz güncellenmemiş olsa bile girişte yapılacak bir değişiklik çıkışın anında (yayıma gecikmesinden sonra) değişmesine neden olur. Yani Mealy tip devrelerde çıkışlar asenkron bir şekilde değişebilir.

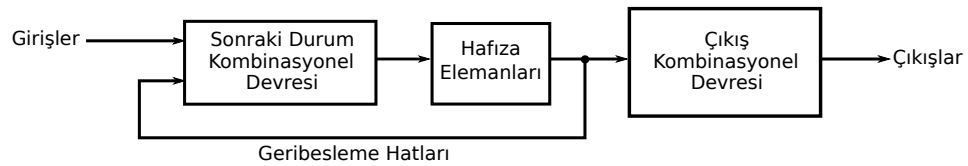


Şekil 7: Mealy tipi ardışıl devrelerin blok diyagramı.

Mealy modelinde çıkışlar girişlere bağlı olduğu için Mealy tipi ardışıl devrelerin durum diyagramında çıkış değerleri okların üzerinde gösterilir. Bu bakımdan, Şekil 2'de elde etmiş olduğumuz durum diyagramı devrenin Mealy tipinde olduğunu bize göstermektedir.

2.2 Moore Modeli

Moore modeli **çıkışların sadece mevcut duruma bağlı olduğu** sonlu durum makinesidir. Moore modeli ardışıl devrelerin blok diyagramı Şekil 8'deki gibidir. Görüldüğü gibi Mealy modelinde giriş ve çıkış bloğu arasında bulunan hat Moore modelinde bulunmamaktadır. Yani çıkışların değişmesi sadece mevcut durumun değişimiyle mümkündür. Bu bakımdan Moore tipi devrelerde çıkışlar her saat darbesiyle birlikte (Mealy tip devrelerin aksine) senkron bir şekilde değişmektedir.



Şekil 8: Moore tipi ardışıl devrelerin blok diyagramı.

Moore modelinde çıkışlar sadece mevcut durumlara bağlı olduğu için, bu modelin durum diyagramında çıkışlar okların üstü yerine mevcut durumu belirten yuvarlakların içerisinde ifade edilir. Biz bunu daha önce Şekil 6'daki durum diyagramında görmüştük. Buna göre bu durum diyagramının devresi Moore tipindedir.