EEM212 - SAYISAL DEVRE TASARIMI
DERS NOTLARI

DERS NOTU 3: DİJİTAL DEVRELERİN SADELEŞTİRİLMESİ

Dr. İsmail Öztürk *

<ismail.ozturk@amasya.edu.tr>

İçindekiler

*Amasya Üniversitesi Teknoloji Fakültesi EEM Bölümü
Daha fazla bilgi için: https://iozturk.com

1 Karnaugh Haritaları

Bir önceki ders notunda çarpımların toplamı veya toplamların çarpımı formundaki Boole fonksiyonlarının dijital devre olarak nasıl gerçekleştirilebileceğini görmüştük. Mesela,

$$F(x, y, z) = xyz + x' + xy'z$$

fonksiyonu, DEĞİL kapıları dışında iki girişli mantık kapılarından toplam 6 tane kullanılarak bir önceki bölümde anlatıldığı gibi gerçekleştirilebilir. Fakat, yine önceki bölümden görmüş olduğumuz üzere, Boole fonksiyonları sadeleştirilerek kendisinden daha basit bir forma indirgenebilir. Örneğin, yukarıdaki fonksiyon aşağıdaki gibi sadeleştirilebilir:

Normal aritmetikte olmadığından unutmuş olabilirsiniz: $x' + xz = (x' + x)(x' + z)$ Boole cebrinde toplamın dağılma kuralıdır.

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= xyz + x' + xy'z \\ &= x' + xz(y + y') \\ &= x' + xz \\ &= (x' + x)(x' + z) \\ &= x' + z \end{aligned}$$

Eğer fonksiyonun sadeleştirilmiş halini devre olarak kurarsak, devrenin çalışması orijinal fonksiyon için kurulan devrenin çalışmasıyla birebir aynı olacaktır. Fakat, fonksiyonun sadeleştirilmiş halini kurmak için tek bir DEĞİL kapısı ile tek bir VEYA kapısı yeterli olacaktır. Görmüş olduğunuz üzere, fonksiyonların sadeleşmiş hallerini kurmak daha kolaydır.

Dijital devre tasarımında göz önünde bulundurulması gereken en önemli hususlar maliyet ve güç tüketimidir. Ne kadar fazla mantık kapısı kullanırsanız maliyet ve güç tüketiminiz o derece artacaktır. Bu nedenle, elde etmiş olduğumuz Boole fonksiyonlarını kurarken mühendisler olarak bizlerin mutlaka o fonksiyonun en sade halini gerçekleştirmemiz gerekir.

Fakat, fonksiyonları yukarıdaki gibi Boole kurallarını kullanarak sadeleştirmenin aşağıdaki gibi dezavantajları vardır:

- Sadece az değişkenli fonksiyonlar için pratiktir. Değişken sayısı arttıkça karmaşık ifadelerin sadeleştirmeleri için çok sayıda ara işlem yapmak gerekir.
- Kişinin yaratıcılığına bağlıdır.
- Hata yapmaya açıktır.

- Fonksiyonun en sade halinin elde edilip edilmediğini belirlemek kolay değildir; gözden kaçan sadeleştirmeler olabilir.
- Sadeleştirme işleminin belirli bir metodolojisi yoktur. Günümüzde, mühendislerin kullandığı CAD programlarının sadeleştirme işlemi yapabilmesi için sadeleştirmenin programlamaya uygun bir metodolojisinin olması gerekir.

İşte bu dezavantajları giderebilmek adına, Boole fonksiyonlarını sadeleştirmek için **Karnaugh haritaları** (ya da **K-haritaları**) adı verilen bir yöntem geliştirilmiştir. Karnaugh haritaları, çarpımların toplamı veya toplamların çarpımı formlarını sadeleştirmek için iki farklı şekilde kullanılır.

1.1 Çarpımların Toplamı Sadeleştirmesi

Çarpımların toplamı formunda verilmiş bir fonksiyonu, programlamaya da uygun belli bir metodoloji ile sadeleştirmek için yapılması gereken ilk şey o fonksiyonu kanonik formda ifade etmektir. Hatırlayacağınız üzere, kanonik form birden fazla şekilde ifade edilebilecek bir Boole fonksiyonunu standart bir formda ifade etmemizi sağlıyordu. Bu nedenle, sadeleştirme işleminin standartlaştırılmasında fonksiyonların ifade ediliş şeklini standartlaştıran kanonik formun kullanılması gayet yerinde bir tercihtir.

Hatırlayacağınız üzere, çarpımların toplamı türündeki kanonik form miniterimleri toplamı olarak adlandırılmaktaydı. Buna göre, miniterimlerin toplamı formunda verilmiş aşağıdaki Boole fonksiyonunu ele alalım:

$$F(x, y, z) = xyz + xyz' + xy'z' + xy'z \tag{1}$$

Bu formda verilmiş fonksiyonları sadeleştirmenin en bariz yolu ortak değişkenlere sahip terimlere dağılma kuralını uygulayarak terimleri aşağıdaki gibi paranteze almaktır:

$$F(x, y, z) = xy(z + z') + xy'(z' + z)$$

Görüldüğü üzere parantez içerisindeki ifadeler $z + z' = 1$ olduğundan elimizde aşağıdaki ifade kalacaktır:

$$F(x, y, z) = xy + xy'$$

Bu iki terim de ortak değişkenlere sahip olduğu için tekrar paranteze alma işlemi uygularsak aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$F(x, y, z) = x(y + y') = x$$

Gördüğünüz üzere sadece parantez içerisine alma işlemi yaparak fonksiyonu sadece tek değişkenli bir hale sadeleştirdik. Dolayısıyla, yukarıdaki gibi tekrar tekrar paranteze alma işlemi ile sadeleştirme yapmak tam istediğimiz gibi bir sadeleştirme metodudur.

***

Şimdi yine kanonik formda verilmiş aşağıdaki G fonksiyonunu sadeleştirmeye çalışalım:

$$G(x, y, z) = xyz + xy'z' + x'yz' + x'y'z \tag{2}$$

Bunun için yine ortak terimleri kullanarak paranteze alma işlemi yapalım:

$$G(x, y, z) = x(yz + y'z') + x'(yz' + y'z)$$

Görüldüğü üzere bu paranteze alma işlemi bize herhangi bir sadeleştirme sağlamadı. Eldeki bu terimleri sadeleştirmemiz de pek mümkün gözükmüyor.

***

Peki nasıl oldu da ilk örnekte art arda sadeleştirme yapabilirken ikinci örnekte herhangi bir sadeleştirme yapamadık? Sizin de rahatlıkla fark edebileceğiniz üzere, ilk örnekte terimler paranteze alınırken paranteze alınan iki terim arasında sadece tek bir değişken farklılık göstermekteydi. İkinci örnekteyse, paranteze alınan terimlerde iki değişken birden farklılık göstermekte. Yani, xyz ve xyz' gibi tek bir değişkeni farklılık gösteren terimler $xyz + xyz' = xy(z + z') = xy$ şeklinde rahatlıkla sadeleştirilebilirken, xyz ve $xy'z'$ örneğindeki gibi iki değişkenin farklı olduğu terimleri $x(yz + y'z')$ şeklinde paranteze almamız bize herhangi bir sadeleştirme sağlamıyor.

Dolayısıyla, miniterimlerin toplamı formunda verilmiş olan fonksiyonları sadeleştirebilmek için yapmamız gereken sadece tek bir değişkeni farklılık gösteren iki terimi seçerek bunları parantez içerisine almaktır. İşte Karnaugh haritalarının çalışma prensibi de budur. Karnaugh haritaları sadece tek bir değişkeni farklılık gösteren terimleri yan yana veya üst üste göstermemizi sağlayarak bu seçim işini kolaylaştıran tablolardır. Örnek olarak aşağıdaki üç değişkenli Karnaugh haritasını inceleyelim:

	$y'z'$	$y'z$	yz	yz'
x'	m_0	m_1	m_3	m_2
x	m_4	m_5	m_7	m_6

Bu Karnaugh haritasında satırlar x değişkeninin değerini belirlerken sütunlar y ve z değişkenlerinin değerini belirler. Bu x, y, z kombinasyonlarına göre tablonun her bir hücresi bir miniterime ($x'y'z' = m_0$, $xy'z' = m_4$ vb.) karşılık gelir. Bu tabloda üst üste gelen hücrelerde sadece x değişkeni farklılık gösterecektir. Mesela, $m_3 = x'yz$ ve $m_7 = xyz$ terimleri üst üstedir ve bu terimlerde sadece x değişkeni farklılık göstermektedir. Dolayısıyla, bunları paranteze aldığımızda $m_3+m_7 = yz(x'+x) = yz$ şeklinde bir sadeleştirme elde ederiz (farklılık gösteren değişken elimine edilir).

Yan yana olan terimlerde de benzer şekilde tek bir değişkenin farklılık göstermesi için, sütun etiketleri yan yana sütunlarda sadece tek bir değişken farklı olacak şekilde seçilmelidir. Yukarıdaki Karnaugh tablosunda sütun etiketleri bu şekilde seçilmiştir. Mesela, en soldaki sütunun etiketi $y'z'$ iken hemen sağındaki $y'z$ seçilmiştir (sadece z değişkeni farklıdır). Bu sayede m_4 ve m_5 gibi yan yana olan iki terimi seçtiğimizde bunlar $xy'z' + xy'z = xy'(z'+z) = xy'$ şeklinde sadeleşecektir (yine farklılık gösteren değişken elimine edilir). Bu durum yan yana tüm sütunlar için geçerlidir (kontrol edin).

Karnaugh haritalarında en soldaki ve en sağdaki sütunlar ile en üstteki ve en alttaki satırlar birbirleriyle alakasız gibi görünse de aslında bu satır ve sütunlar da yan yana veya üst üsteymiş gibi sadece tek bir değişken için farklılık gösterirler. Mesela, yine yukarıdaki tabloda en soldaki $y'z'$ etiketi ile en sağdaki yz' etiketinde sadece tek bir değişken farklılık göstermektedir (y değişkeni). Dolayısıyla, m_0 ile m_2 ve m_4 ile m_6 terimleri de Karnaugh haritasında yan yanaymış gibi değerlendirilir. Örneğin, $m_0 = x'y'z'$ ve $m_2 = x'yz'$ hücreleri tabloda yan yana yazılmasa da bunlar tek bir değişken için (y değişkeni) farklılık göstermekte ve bu nedenle $x'y'z'+x'yz' = x'z'(y+y') = x'z'$ şeklinde sadeleştirilebilmektedirler (yine farklılık gösteren değişken elimine edilir).

En üstteki ve en alttaki satırlar arasında da benzer bir ilişki vardır fakat bunu gösterebilmek için dört veya daha fazla değişkenli Karnaugh haritaları oluşturmamız gerekeceğinden bunu ileride göstereceğiz. Şimdi Eşitlik 1 ve Eşitlik 2 için yukarıda Boole kuralları ile sadeleştirdiğimiz ifadeleri yukarıdaki Karnaugh haritasını kullanarak sadeleştirelim:

Eşitlik 1 için Karnaugh haritası oluşturmak istediğimizde $F(x, y, z) = xyz + xyz' + xy'z' + xy'z$ olduğundan tabloda bu terimlere karşılık gelen yerlere 1 yazarız:

	$y'z'$	$y'z$	yz	yz'
x'				
x	1	1	1	1

Tabloda bu terimlerin olduğu yere 1 yazmamızın nedeni tamamen miniterimlerin özelliğiyle alakalı. Hatırlayacağınız üzere herhangi bir giriş kombinasyonu için sadece tek bir miniterim 1 olmaktaydı ve biz bu özelliği kullanarak fonksiyonların 1 olduğu değere karşılık gelen miniterimlerin VEYA'sını alarak o fonksiyonu ifade edebiliyorduk. Karnaugh ile sadeleştirme işleminde de kanonik miniterimlerin toplamı formuyla uğraştığımız için F fonksiyonunda $m_4 = xy'z'$ şeklinde bir miniterimin varlığı aslında $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ giriş kombinasyonu için F fonksiyonu 1 olur demekle aynı şeydir. Buna uygun olarak, yukarıdaki Karnaugh haritasında $xy'z'$ terimine karşılık gelen hücreye 1 yazmamız hem F fonksiyonunun $xy'z'$ miniterimine sahip olduğunu hem de $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ girişi için bu fonksiyonun 1 olması gerektiğini ifade eder. Bu bakımdan, yukarıdaki Karnaugh haritasını giriş değerleri kombinasyonlarına göre aşağıdaki gibi de ifade edebiliriz:

Yan yana sütun etiketlerinde sadece bir değişken farklı olması gerektiği için tabloyu giriş değeri cinsinden yazdığımızda yan yana sütun etiketleri arasında sadece bir bitin farklı olması gerekir. Bu nedenle 01 sütununun sağındaki sütun 11 olmalıdır. 01'den sonra 10 olması için iki bit birden değişmeli!

x \ yz	00	01	11	10
0				
1	1	1	1	1

Bu Karnaugh haritası yukarıdakiyle tamamen aynıdır. Sadece artık F fonksiyonu $xy'z'$ miniterimi içerir demek yerine, doğrudan F fonksiyonu $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ giriş kombinasyonu için 1 olur diyoruz. Bu andan itibaren ikinci gösterim tipini kullanacağız.

Şimdi Karnaugh haritası ile Eşitlik 1'i sadeleştirme işlemimize yeni tablomuz ile devam edelim. Tablodan gördüğümüz üzere m_4 ile m_5; m_5 ile m_7; m_7 ile m_6; m_6 ile m_4 [1] terimleri yan yanadır. Karnaugh haritasının sütun etiketlerinin seçimi bu yan yana terimlerde sadece tek bir değişkenin farklı olmasını garanti altına alır. Bu sayede, yan yana terimleri seçip farklılık gösteren terimi silersek aşağıdaki gibi bir sadeleştirmenin olacağını anlarız:

$$xy'z' + xy'z + xyz + xyz' = xy' + xy = x$$

Karnaugh haritası bu sadeleştirmeyi anında görebilmemizi sağlar. Tabloda yan yana 1 değerlerini veren x, y, z değerlerini aşağıdaki gibi alt alta yazalım:

xyz	Miniterim Karşılığı
100	m_4
101	m_5
111	m_7
110	m_6

Buradan $m_4 + m_5$ sonucunu bulmak için 100 ile 101 arasında z değerinin farklılık gösterdiğini görür ve bu değişkeni elimine edersek kalan 10_ değeri xy' şeklinde sadeleştirme sonucu olacaktır (yukarıdaki $xy'z' + xy'z$ işlemi). Benzer şekilde, $m_7 + m_6$ sonucu için 111 ile 110 arasında değişiklik gösteren değeri elimine edip 11_ yani xy değerini buluruz (yukarıdaki $xyz + xyz'$ işlemi). Bu eldeki 10_ ve 11_ değerleri de tek bir değer için farklılık gösterdiğinden (y değeri), yine bu değeri elimine edersek elimizde x değişkenine ait 1__ değeri kalır ki bu da $m_4 + m_5 + m_7 + m_6 = x$ anlamına gelir.

[1] m_6 ile m_4 fiziken yan yana olmasa da yukarıda açıkladığımız üzere biz yan yana kabul ediyoruz.

> Bu sonuca ulaşırken m_4 ile m_5 ve m_7 ile m_6 terimlerinin yan yana olma özelliğini kullandık. Aynı sonuca m_4 ile m_6 ve m_5 ile m_7 terimlerinin yan yana olma durumunu kullanarak da ulaşabiliriz. Buna göre, $m_4 + m_6$ işleminin sonucunu bulmak için 100 ile 110 arasında değişiklik gösteren y terimini elimine ederek 1_0 yani xz' değerini buluruz. Benzer şekilde, $m_5 + m_7$ sonucu için 101 ile 111 arasında farklılık gösteren y terimini elimine ederek 1_1 yani xz değerini buluruz. Elde ettiğimiz bu iki değerin VEYA'sını almak için 1_0 ile 1_1 arasındaki değişiklik gösteren z terimini elimine ederek 1_ _ sonucunu buluruz ki bu da $m_4 + m_6 + m_5 + m_7 = x$ anlamına gelir.

Karnaugh haritasını kullanarak sadeleştirmeyi miniterimleri iki iki seçip yapmak yerine 4 terimi birden seçerek de yapabiliriz. Bu seçimi tabloda aşağıdaki gibi gösteririz:

x \ yz	00	01	11	10
0				
1	1	1	1	1

Bu seçimde (yukarıda görmüş olduğumuz üzere) değişen terimlerin elimine edileceğini bildiğimizden, seçime karşılık gelen x, y, z değerlerine baktığımızda sadece x değerinin değişmeyip sabit kaldığını görürüz:

xyz
100
101
111
110

Burada değişen değerler, yan yana terimlerde farklılık gösteren terimlere karşılık gelmektedir. Bu nedenle, bu farklılık gösteren değerleri sileriz ve sabit kalan x değeri 1 olduğu için sonuç $F = x$ olarak buluruz. (Eğer sabit kalan x teriminin değeri 0 olsaydı bu sefer sonuç $F = x'$ olurdu). İşte Karnaugh haritasında bu şekilde seçtiğimiz **yan yana veya üst üste** terimlerde değişiklik gösteren değerleri elimine ederek sadeleştirme sonucuna hızlıca ulaşırız.

Karnaugh haritasında değişmeyen değerleri bulmak için eldeki tüm değerleri alt alta

xyz
100
101
111
110

şeklinde sıralamamız gerekmez. Karnaugh haritasında bunu görmek kolaydır. Önce satıra bakarak değişmeyen değerler alınır: Yukarıdaki örnek için satırda $x = 1$ değeri sabittir. Daha sonra sütun etiketlerine bakarak değişmeyen değerleri alırız: Yukarıdaki örnekte sütun etiketlerine baktığımızda hem y hem de z değiştiği için (00, 01, 11, 10) ikisi de elimine edilir. Sonuç olarak elimizde x kalır ki bu sadeleştirme sonucudur.

***

Şimdi daha önce sadeleştirmeyi başaramadığımız Eşitlik 2'deki $G(x, y, z) = \sum(1, 2, 4, 7)$ fonksiyonunu sadeleştirmeye çalışalım. Bu fonksiyon için miniterimleri Karnaugh haritasına yazdığımızda aşağıdaki tabloyu elde ederiz:

x \ yz	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

Bu tablodan görüldüğü üzere yan yana veya üst üste gelen bir terim yoktur. İşte sadeleştirme yapamamamızın nedeni de budur. Çünkü herhangi iki miniterimi seçtiğimizde iki değişken birden farklılık göstermektedir. Mesela, m_1 ile m_4'ü seçersek 001 ile 100 terimlerinde hem x hem de z değişkenleri farklılık göstereceğinden bunları parantez içerisine alıp sadeleştirmemiz mümkün değildir. Bu sadece bu terimler için değil, Karnaugh haritasındaki tüm diyagonal terimler için geçerlidir (kontrol edin). Karnaugh haritasında tüm diyagonal terimler en az iki değişken için farklılık göstereceğinden, Karnaugh haritasında sadeleştirilecek terimler seçilirken asla diyagonal terimler seçilmez. Buna göre, G fonksiyonu daha da sadeleştirilemez; mevcut formuyla en sade halindedir.

Karnaugh haritasında sadeleştirilecek terimlerin seçiminde takip edilecek kurallar sonraki kısımda açıklanmaktadır.

1.1.1 Karnaugh Haritası Kuralları

1. Karnaugh haritasında olmayan miniterimler aslında 0 ile ifade edilir, fakat bu 0 değerlerini kullanmadığımız için tabloya yazmayız. Yani daha önce Eşitlik 1 için oluşturduğumuz

x \ yz	00	01	11	10
0				
1	1	1	1	1

Karnaugh haritası aslında aşağıdaki gibidir:

x \ yz	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1

Gerçekten de bu 0 değerlerine karşılık gelen giriş kombinasyonları için F fonksiyonu da 0 olur. Çünkü fonksiyonun bir miniterimi içermemesi, o miniterime karşılık gelen giriş kombinasyonunda fonksiyonun 0 olması anlamına gelir.

Eğer Karnaugh haritasında 0'ları da doldurduysanız, seçiminiz kesinlikle 0 içermemelidir. Yoksa olmayan bir terimi kullanarak sadeleştirme yapmış olursunuz. Örneğin, aşağıdaki seçim hatalıdır:

x \ yz	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1

HATALI!

***

2. Seçimin içerdiği terim sayısı 2'nin bir üssü olmalı ($2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, vb.). Çünkü yukarıda Eşitlik 1'i sadeleştirirken görmüş olduğumuz üzere 2'den fazla terimi seçip sadeleştirme yaparken aslında terimleri iki iki seçip sadeleştirdikten sonra kalan sonuçları tekrar iki iki gruplayarak paranteze alma işlemiyle sadeleştiriyoruz. Mesela, üç terimin seçildiği aşağıdaki Karnaugh haritası sadeleştirmesi yanlıştır:

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0		1	1	1
1				

HATALI!

***

3. Seçimler üst üste veya alt alta olmalı. ***Diyagonal seçimler sadeleştirilemez***. Bunun nedenini yukarıda açıklamıştık.

***

4. Seçimler olabildiğince büyük olmalı. Yoksa sadeleştirmeler doğru olur fakat olası diğer sadeleştirmeleri kaçırırız. Neticede elde edilen sonuç fonksiyonun en sade hali olmaz. Örnek olarak aşağıdaki seçimi inceleyelim:

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0			1	1
1			1	1

EKSİK!

Üstteki seçim için satırda $x = 0$ değeri sabitken sütunda $y = 1$ değeri sabittir. Dolayısıyla, üstteki sadeleştirme $x'y$ değerini verir. Alttaki sadeleştirme için, satırda $x = 1$ sabitken sütunda yine $y = 1$ sabit olduğundan sadeleştirme xy olur. Buna göre, sadeleştirme sonucu olarak

$$F = x'y + xy$$

buluruz. Fakat, rahatlıkla görebileceğiniz üzere yukarıdaki ifadelerde sadece x değişkeni farklılık gösterdiğinden bunlar $F = x'y + xy = y$ şeklinde daha da sadeleşebilir. İşte bu tür olası sadeleştirmeleri kaçırmamak adına seçimler aşağıdaki gibi mümkün olduğunca büyük olmalıdır:

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0			1	1
1			1	1

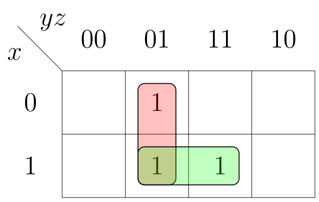
Bu seçim için baktığımızda satırda x değiştiği için elimine edilir. Sütunda ise $y = 1$ değeri sabit kaldığından sonuç olarak

$$F = y$$

buluruz.

***

5. Seçimler kesişebilir. Örneğin, aşağıdaki gibi iki seçim geçerlidir:



GEÇERLİ!

Bu iki seçim $F = y'z + xz$ sonucunu verir: Dikey seçim için satırdaki x elenir; sütunda $y = 0$ ve $z = 1$ sabit kaldığından sonuç $y'z$ olur. Yatay seçim için satırda $x = 1$ sabitken, sütunda $z = 1$ sabit olduğundan sonuç xz olur. Sadeleştirme ise bu iki sonucun VEYA'sıdır.

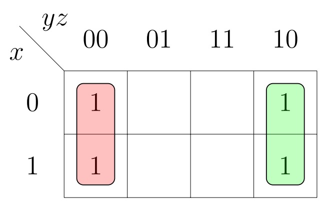
Bu seçimin neden doğru olduğunu görmek için terimleri açık açık yazarak Boole kuralları ile hesaplama yapalım:

$$\begin{aligned} F &= x'y'z + xy'z + xyz \\ &= y'z + xyz \\ &= z(y' + xy) \\ &= z[(y' + x)(y' + y)] \\ &= y'z + xz \end{aligned}$$

Görüldüğü üzere yukarıdaki Karnaugh sadeleştirmesi ile Boole cebri ile sadeleştirme aynı sonucu vermektedir. Diğer kesişim içeren seçimler de yukarıdaki gibi ispatlanabilir. Temel prensip aynıdır.

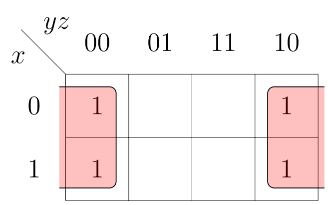
***

6. Tablolarda en soldaki ve en sağdaki sütunlar yan yanaymış gibi değerlendirilirken, en üstteki ve en alttaki satırlar da üst üsteymiş gibi değerlendirilir. Buna göre, aşağıdaki seçim olası en büyük seçim olmadığı için en sade sonucu vermeyecektir:



EKSİK!

En soldaki ve en sağdaki satırlar da aslında yan yana olduğu için, olası en büyük seçim iki tane iki terimli seçim yerine aşağıdaki gibi tek bir dört terimli seçimdir:

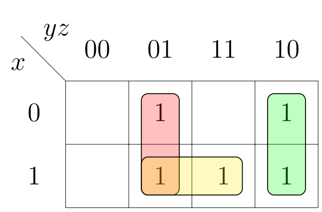


En üstteki ve en alttaki satırlar da benzer şekilde üst üsteymiş gibi değerlendirilir. Bunu dört değişkenli Karnaugh haritalarını oluşturduğumuzda kullanacağız.

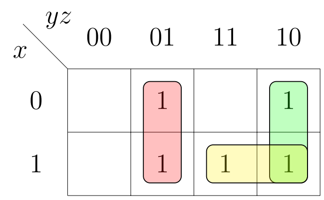
***

7. Fonksiyonun en sade hali eşsiz değildir; birden fazla şekilde ifade edilebilir. Bazen Karnaugh haritasında yapacağınız farklı seçimler farklı sonuçlar elde etmenizi sağlayabilir. Eğer yapmış olduğunuz seçimler yukarıdaki kurallara uyduysa, elde edilecek farklı seçimlerin hepsi de doğru olacak ve hepsi de o fonksiyonun en sade hali olacaktır.

Örnek olarak $F(x, y, z) = \sum(1, 2, 5, 6, 7)$ fonksiyonunu ele alalım. Karnaugh haritasında sadeleştirmeyi aşağıdaki seçimleri yaparak bulabiliriz:



Bu seçimler için sadeleştirme $F = y'z + xz + yz'$ ifadesini verecektir. Fakat, aşağıdaki seçim de yukarıdaki kurallara göre uygun bir seçimdir:



Bu seçim ise $F = y'z + xy + yz'$ sadeleştirmesini verir. Gördüğünüz üzere, yataydaki olası iki farklı seçim iki farklı sonuç vermektedir. Her iki sonuç da doğru olup, her iki sonuç da orijinal fonksiyonun en sade halidir.

***

8. Satır ve sütun etiketleri alt alta veya yan yana sadece tek bir değer farklı olacak şekilde seçilmelidir demiştik. Bu nedenle, tüm örneklerimizde sütun etiketi olarak sırasıyla 00, 01, 11, 10 değerlerini kullandık. Fakat, etiketlerin 0'dan veya 00'dan başlaması şart değildir. Etiketlemeye istediğimiz değerden başlayabiliriz. Sadece yan yana veya üst üste etiketlerde iki veya daha fazla değer farklı olmamalı. Örnek olarak aşağıdaki tablo geçerli bir Karnaugh haritasıdır:

Yandaki Karnaugh haritası aslında 00'dan başlayan haritanın bir sütun sağa bir satır yukarı kaydırılmış halidir. Hatırlarsanız uçlardaki satır ve sütunlar yan yana ve üst üste!

$x \backslash yz$	10	00	01	11
1	m_6	m_4	m_5	m_7
0	m_2	m_0	m_1	m_3

GEÇERLİ!

Gördüğünüz üzere yukarıdaki Karnaugh haritasında yan yana sütunlarda sadece tek bir değer farklıdır: 10, 00 gibi. Eğer yan yana sütunlarda iki değeri birden farklılık gösteren etiketleriniz varsa o tablo geçerli bir Karnaugh haritası olmaz. Örneğin, aşağıdaki tabloda 00 sütunundan hemen sonra 11 sütunu gelmektedir. İki değer birden değiştiğinden bu geçerli bir Karnaugh haritası olamaz:

$x \backslash yz$	10	00	11	01
1				
0				

HATALI!

> Karnaugh tablolarında etiket olarak 00, 01, 11, 10 sırasını sürekli kullanırsanız hem standart bir tablo kullanmış olursunuz hem de pratik yaptıkça tabloları hızlı bir şekilde doldurursunuz.

***

9. Eğer verilen bir fonksiyon için terimlerden biri miniterim değilse, tabloda o terimin değişkenlerini içeren tüm hücrelere 1 yazılır. Bunu bir örnekle açıklamakta fayda var: $F(x, y, z) = x' + xy' + xyz'$ olsun. xyz' miniterimine karşılık gelen giriş kombinasyonu $(110)_2$'dır. Bunu Karnaugh tablosuna aşağıdaki gibi rahatlıkla koyabiliriz.

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0				
1				1

x' ve xy' terimleri ise miniterim olmadığından bunları tabloya koyarken miniterime çevirmemiz lazım. Bir önceki ders notundan hatırlarsanız bunu $y' + y$ gibi etkisiz elemanlarla VE işlemi alarak yapıyorduk. Mesela xy' ifadesini miniterimler cinsinden ifade etmek için $xy' = xy'(z + z') = xy'z + xy'z'$ işlemini yaparız. Gördüğünüz üzere xy' terimi xy' ile başlayan tüm miniterimlerin VEYA'sı alınarak elde edilir. Buna göre, xy' ifadesini Karnaugh haritasına geçirmek için yukarıdaki işlemi yapmak yerine hızlıca tabloda $x = 1$ ve $y = 0$ içeren tüm yerlere 1 yazabiliriz:

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0				
1	1	1		1

Benzer şekilde x' terimini miniterime çevirmek için önce $(y+y')$ ile çarpmamız; daha sonra da elde ettiğimiz terimlere z eklemek için tüm bu yeni terimleri $(z+z')$ ile çarpmamız gerekecektir. Bu uzun işlemlerin sonunda x' ile başlayan tüm miniterimleri elde edeceğimizden, işlem yapmak yerine hızlıca tabloda $x = 0$ içeren tüm hücreleri 1 yapmamız daha kolay olacaktır (yani $x = 0$ satırının tümünü 1 yaparız):

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1		1

Miniterim dışındaki terimler Karnaugh haritasına işte bu şekilde kolaylıkla eklenebilirler.

***

Sonraki kısımlarda farklı değişken sayıları için farklı Karnaugh haritalarının nasıl oluşturulup kullanılacağını inceleyeceğiz.

1.1.2 İki Değişkenli Fonksiyonlar

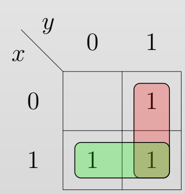
İlk önce denklemi açıkça verilen bir fonksiyonun sadeleştirmesini Karnaugh haritası kullanarak yapalım:

Örnek 1.1:

$F(x, y) = x'y + xy' + xy$ *fonksiyonunu Karnaugh haritası ile sadeleştiriniz.*

—

Miniterimlere karşılık gelen giriş değerleri şu şekildedir: $x'y \to (01)_2$, $xy' \to (10)_2$ ve $xy \to (11)_2$. Bunları kullanarak tabloyu oluşturur ve aşağıdaki gibi bir seçim yaparız:



Yatay seçim için $x = 1$ sabit kaldığı için bu seçim x değerini verir. Dikey seçim için $y = 1$ sabit kaldığından bu seçim y değerini verir. Sadeleştirme sonucu bu iki seçimin VEYA'sı yani $F(x, y) = x + y$ olur.

Bir önceki notlardan hatırlayacağınız üzere yukarıdaki örnek aynı zamanda $F(x, y) = \sum(1, 2, 3)$ fonsiyonunu Karnaugh ile sadeleştiriniz demekle aynıdır.

Şimdi doğruluk tablosu verilen bir fonksiyonu sadeleştirelim:

Örnek 1.2:

Aşağıda doğruluk tablosu verilen fonksiyonu Karnaugh haritası ile sadeleştirin.

x	y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

—

Fonksiyonun 1 olduğu değerleri tabloya doğrudan yazarız. Daha sonra üst üste gelen 1 değerlerini aşağıdaki gibi seçeriz:

$x \backslash y$	0	1
0	1	
1	1	

Sadece sütunda $y = 0$ değeri sabit kaldığı için sadeleştirme sonucu $F(x, y) = y'$ olur. (Bu sonucu Karnaugh haritası kullanmadan doğrudan doğruluk tablosu üzerinde de görebilirdiniz.)

Yine bir önceki notlardan hatırlayacağınız üzere, yukarıdaki doğruluk tablosu $F(x, y) = \sum(0, 2)$ fonsiyonununa karşılık gelmektedir.

1.1.3 Üç Değişkenli Fonksiyonlar

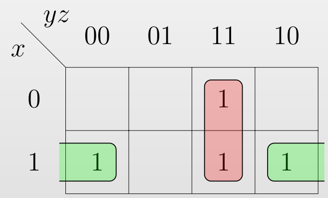
Yukarıda giriş yaparken Karnaugh haritalarını üç değişkenli fonksiyonlar için kurmuştuk zaten. Dolayısıyla bu tür tabloların nasıl kurulacağını biliyorsunuz. Şimdi birkaç örnek yapalım:

Örnek 1.3:

$F(x, y, z) = \sum(3, 4, 6, 7)$ *fonksiyonunu Karnaugh haritası ile sadeleştirin.*

—

Bir önceki ders notunda anlatmış olduğumuz üzere miniterimlere karşılık gelen giriş değerleri şu dönüşümle bulunur: $3 = (011)_2$, $4 = (100)$, $6 = (110)_2$, $7 = (111)_2$. Fonksiyon bu giriş kombinasyonları için 1 olmalıdır. Buna göre Karnaugh haritasını aşağıdaki gibi doldururuz:



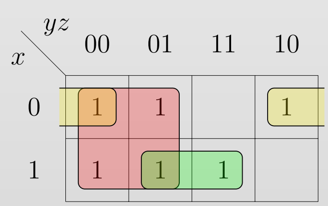
Karnaugh haritasında yukarıdaki gibi iki seçim yaparak tüm 1 değerlerini kullanmış oluruz. Yatay seçimde $x = 1$ ve $z = 0$ sabit kaldığından bu seçimin sonucu xz' olur. Dikey seçimde ise $y = 1$ ve $z = 1$ sabit kaldığından bu seçimin sonucu yz olur. Dolayısıyla, sadeleştirme sonucu $F(x, y) = xz' + yz$ olarak elde edilir.

Örnek 1.4:

$F(x, y, z) = x'y'z' + x'y'z + x'yz' + xy'z' + xy'z + xyz$ fonksiyonunu Karnaugh haritası kullanarak sadeleştiriniz.

—

Miniterimlere karşılık gelen giriş kombinasyonları: $x'y'z' \rightarrow (000)_2$, $x'y'z \rightarrow (001)_2$, $x'yz' \rightarrow (010)_2$, $xy'z' \rightarrow (100)_2$, $xy'z \rightarrow (101)_2$, $xyz \rightarrow (111)_2$. Bunları aşağıdaki gibi tabloya koyarız:



Bu tabloda yukarıdaki gibi üç seçimle tüm 1 ifadelerini gruplamış oluruz. Dört terimli seçim için sütunda sadece $y = 0$ sabit kaldığından sonuç y' olur. Ortadaki yatay seçimde ise $x = 1$ ve $z = 1$ sabit kaldığından sonuç xz olur. Son olarak, en sol uç ile en sağ uçtaki terimleri içeren seçim için $x = 0$ ve $z = 0$ değerleri sabit kaldığından, bu seçim sonucu $x'z'$ olur. Dolayısıyla, sadeleştirme sonucu $F(x, y, z) = y' + xz + x'z'$ olmalıdır.

1.1.4 Dört Değişkenli Fonksiyonlar

Dört değişkenli fonksiyonlar için Karnaugh haritası aşağıdaki gibi kurulur:

$xy \backslash zw$	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

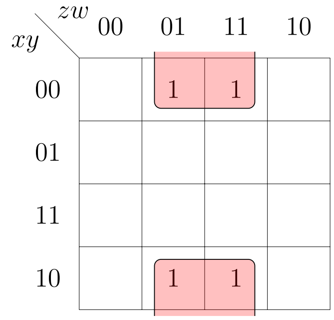
Artık satırlar da iki değişkenle ifade edilir ve satırların etiketleri de yine alt alta sadece bir değerin farklı olduğu 00, 01, 10, 11 sırasındadır. Bunun dışında, artık en üstteki ve en alttaki satırları da üst üsteymiş gibi kabul ederiz. Bunu $F(x, y, z, w) = \sum(1, 3, 9, 11)$ örneğiyle gösterelim. Bu örnek için Karnaugh haritası aşağıdaki gibi olur:

$xy \backslash zw$	00	01	11	10
00		1	1	
01				
11				
10		1	1	

Eğer aşağıdaki gibi iki farklı seçim yaparsak sadeleştirmemiz $F(x, y, z, w) = x'y'w + xy'w$ şeklinde eksik olacaktır:

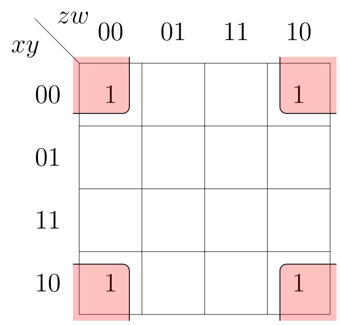
$xy \backslash zw$	00	01	11	10
00		1	1	
01				
11				
10		1	1	

Olası en büyük seçimi bulmak için en üstteki ve en alttaki satırların da üst üsteymiş gibi kabul edildiğini unutmamamız lazım. Bunun nedeni, en üst satır ve en alt satıra ait aynı sütundaki hücrelere baktığınızda bu hücrelerin değerlerinin sadece bir değişken için farklı olmasıdır (kontrol edin). Dolayısıyla, bu hücreleri de paranteze alma işlemi ile kolayca sadeleştirebiliriz. Buna göre, verilen fonksiyon için olası en büyük seçim aşağıdaki gibi olacaktır:



Bu seçimde satırlara baktığımızda $y = 0$ değerinin; sütunlara baktığımızda da $w = 1$ değerinin sabit kaldığını görürüz. Buna göre, sadeleştirme sonucu $F(x, y, z, w) = y'w$ olmalıdır.

Hem en üst ve en alt, hem de en sol ve en sağ satır ve sütunların birbiriyle yan yana ve üst üste olması bir başka ilginç bağlantıyı da ortaya çıkarır: Bu Karnaugh haritasında köşelerdeki hücreler de birbirleriyle alt alta ve üst üste ilişkili olduğundan, bunları dörtlü tek bir seçim olarak aşağıdaki gibi kullanabiliriz:



Bu ilişkiyi görebilmek için m_0 hücresinin hem m_2 ile yan yana, hem de m_8 ile üst üste olduğunu fark etmek gerekir. Diğer köşe terimlerde de benzer ilişki olduğundan, köşedeki terimler aşağıdaki gibi bir tablo oluştururlar:

m_{10}	m_8
m_2	m_0

Bahsedilen bu farklılıklar dışında, dört değişkenli Karnaugh haritası sadeleştirme işlemleri ve hücrelerin doldurulması açısından iki ve üç değişkenli haritalarla tamamen aynıdır.

Örnek 1.5:

$F(x, y, z, w) = x'w' + xy'w' + x'z'w + x'zw$ fonksiyonunu Karnaugh haritası ile sadeleştirin.

—

Karnaugh haritası Bölüm 1.1.1 9. kurala göre doldurulur. Yani $x'w'$ ($x = 0$, $w = 0$) içeren tüm hücreler 1yapılır. Diğer tüm terimlerde de aynı yol izlendiğinde aşağıdaki tablo elde edilir:

$xy \backslash zw$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11				
10	1			1

Bu tabloda 4 köşe hücre ve yukarı yarıdaki 8 hücre iki ayrı grup olarak seçilir. Köşe hücrelerde satırda $y = 0$ sabit kalırken, sütunda $w = 0$ sabit kalır. Dolayısıyla, köşelerin sadeleştirilmesi $y'w'$ terimini verir. Diğer seçimde ise satırda $x = 0$ sabit kalırken sütunda sabit kalan terim yoktur. Yani, bu seçimin sonucu x' terimidir. Buna göre, sadeleştirme işleminin sonucu $F(x, y, z, w) = x' + y'w'$ olmalıdır.

1.1.5 Beş Değişkenli Fonksiyonlar

Beş değişkenli fonksiyonlar için iki tane dört değişkenli Karnaugh haritası kullanılır. Bu haritalardan biri değişkenlerden bir tanesinin 0 olduğu durumu temsil ederken, diğeri aynı değişkenin 1 olduğu durumu temsil eder. Sadeleştirme yaparken bu iki haritanın üst üste olduğunu varsayarız.

Örneğin elimizde $F(a, b, c, d, e)$ şeklinde bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon için $a = 0$ ve $a = 1$ olmak üzere aşağıdaki gibi iki tane dört değişkenli tablo oluşturulur:

bc \ de	00	01	11	10
00				
01		1		
11				
10				

$a = 0$

bc \ de	00	01	11	10
00				
01		1		
11				
10				

$a = 1$

Bu iki tablo üst üste olduğu için yukarıda görünen m_5 ile m_{21} hücreleri seçilerek sadeleştirme yapılabilir. Tekmiş gibi görünen bu seçimler aslında $(abcde)_2 = (00101)_2$ ve $(abcde)_2 = (10101)$ şeklinde üst üste iki hücreden oluşmaktadır. Bu iki hücre arasında a değişkeni farklılık gösterdiği için elimine edilir ve $(bcde)_2 = (0101)$ olduğundan sadeleştirme sonucu $b'cd'e$ terimi olur.

Beş değişkenli Karnaugh haritalarını sadeleştirirken hem iki tablo arasındaki ortaklıklar seçilmeli, hem de tabloların kendi içlerindeki seçimler halledilmelidir. Toplamda $2^5 = 32$ miniterimle uğraştığımız için işler biraz daha karmaşıklaşır.

Örnek 1.6:

$F(a,b,c,d,e) = \sum(0,1,2,3,4,8,12,14,15,16,17,18,19,21,29,30,31)$ *fonksiyonunu Karnaugh haritası kullanarak sadeleştiriniz.*

—

Miniterimleri tabloda yerlerine yerleştirdiğimizde aşağıdaki Karnaugh haritalarını elde ederiz:

bc \ de	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1			
11	1		1	1
10	1			

$a = 0$

bc \ de	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1		
11		1	1	1
10				

$a = 1$

Öncelikle her iki tabloda ortak olan terimleri seçelim. Şekilden de görebileceğiniz üzere her iki tablonun en üstteki satırları ortaktır. Bunları 8'li grup olarak seçeriz. Bu seçimde a, d ve e değişkenleri sabit kalmadığı için elenir. Satırda $b = 0$ ve $c = 0$ değeri sabit kaldığından seçim $b'c'$ değerini verir.
Bunun dışında, $(bcde)_2 = (1111)_2$ ile $(bcde)_2 = (1110)_2$ terimleri her iki tabloda da ortaktır. Bu değerleri her iki tabloda da seçtiğimizde toplam 4 hücrelik bir seçimimiz olur. a değiştiği için hemen eleriz. Geri kalan değişkenlerde ise sadece e değiştiği için onu eleriz ve elimizde $(bcd)_2 = (111)_2$ kalır. Bu ise bcd terimidir.
Her iki tabloda ortak olan başka hücreler yoktur. Dolayısıyla, artık a değişkenini eleyemeyiz. $a = 0$ tablosuna baktığımızda en soldaki sütunu hiç seçmediğimiz için onu seçeriz. Bu seçimde $a = 0$, $d = 0$ ve $e = 0$ sabit kaldığı için seçim $a'd'e'$ sonucunu verir.
$a = 1$ tablosuna baktığımızda ise, $(abcde)_2 = (10101)_2$ ve $(abcde)_2 = (11101)_2$ hücrelerinin seçilmediğini görürüz. Bu iki hücreyi seçersek farklılık gösteren b değişkeni elimine edilir ve $acd'e$ terimini elde ederiz.
Elde ettiğimiz tüm sadeleştirmeleri birleştirirsek $F(a, b, c, d, e) = b'c' + bcd + a'd'e' + acd'e$ sonucuna ulaşırız.

1.1.6 Altı Değişkenli Fonksiyonlar

Altı değişkenli fonksiyonlar için dört tane dört değişkenli Karnaugh haritası kullanırız. Bu dört tablo $F(a, b, c, d, e, f)$ şeklindeki bir fonksiyon için ab değişkenlerinin alabileceği 4 tane 00, 01, 11 ve 10 değerlerine karşılık gelir. Tabi bunları da üst üsteymiş gibi kabul ederiz. Sırasıyla $ab = 00$ tablosu $ab = 01$ tablosunun altında; $ab = 01$ tablosu ise $ab = 11$ tablosunun altında; $ab = 11$ tablosu ise $ab = 10$ tablosunun altında; son olarak da $ab = 10$ tablosu $ab = 00$ tablosunun altında kabul edilir. Bu nedenle tabloları aşağıdaki düzende sıralarız:

$$\begin{array}{ccc} ab = 00 & \Longleftrightarrow & ab = 01 \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ ab = 10 & \Longleftrightarrow & ab = 11 \end{array}$$

Yukarıda oklar üst üste olma durumunu ifade eder. Dikkat ederseniz üst üste tablolarda da a ve b değerlerinden yalnızca biri değişiklik gösteriyor. Tahmin edebileceğiniz üzere bunu değişen değişkeni paranteze alıp elimine etmek için bu şekilde seçiyoruz. Buna göre, tabloların kendi içlerinde seçim yapıp sadeleştirme yaptığımız gibi, yukarıdaki gibi dizilmiş üst üste olan ab tabloları arasında da ortak gruplar seçerek sadeleştirme yapmamız lazım (mesela üst üste olan $ab = 01$ ile $ab = 11$ tablolarının ortak hücreleri tıpkı 5 değişkenli haritalarda yaptığımız gibi seçilmelidir. Bunu diğer üst üste olma durumları için de tekrarlarız).

6 değişken için toplam $2^6 = 64$ miniterimle uğraşmanız gerekmektedir. Daha yüksek sayıdaki terimleri ($2^7 = 128$ ve sonrası) elle sadeleştirmek mümkün olmadığından, bu sayıda değişkenin olduğu tasarımlarda bilgisayar programları kullanmak zorunluluk halini alır.

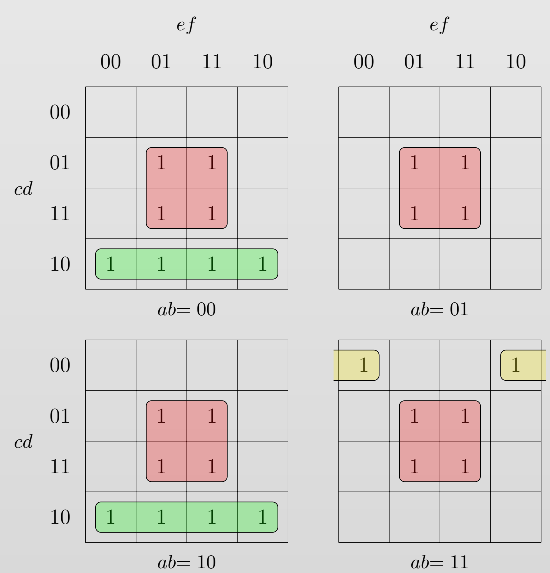
Örnek 1.7:

$$F(a,b,c,d,e,f) = \sum(5,7,8,9,10,11,13,15,21,23,29,31,37,39,40,41,\\ 42,43,45,47,48,50,53,55,61,63)$$

fonksiyonunu Karnaugh haritası kullanarak sadeleştirin.

—

Miniterimleri yerlerine koyduğumuzda aşağıdaki tabloları elde ederiz (tabloların sırasının yukarıda bahsettiğimiz üst üste olma formatında olduğuna dikkat edin):



Tablolardan görüldüğü üzere sadece üç tane seçim yapmamız yeterlidir. Tabloların tam ortasındaki dörtlü grup tüm tablolarda ortak olduğundan önce bu dörtlü grupları tüm tabloları da işin içine katarak seçeriz. Yukarıda gördüğünüz üzere bu seçim $4 \times 4 = 16$ hücre içerir. Tüm 4 tablo da seçildiği için a ve b değerlerinin ikisi de bu seçimde değişiklik gösterir. Dolayısıyla, öncelikle bu değişkenleri eleriz. Ardından bu seçim için satırda $d = 1$ değerinin sabit sütundaysa $f = 1$ değerinin sabit olduğunu görürüz. Buna göre bu seçim df değerini verir.
Tüm tablolar için ortak olan başka terimler yoktur. Bu nedenle, üst üste ikili tablolar arasında ortak hücreler var mı diye bakarız. Buna göre, $ab = 00$ ile

$ab = 10$ tablolarının en alt satırlarının ortak olduğunu görürüz. Bu hücreleri yukarıdaki gibi seçtiğimizde, ab değerlerinden $b = 0$ değerinin sabit kaldığını görürürüz (a elenir). Sonra satıra baktığımızda $cd = 10$ değerinin sabit kaldığını fark ederiz. Sütunda ise sabit kalan bir değişken yoktur. Böylece, bu seçim bize $b'cd'$ terimini verir.
Son olarak herhangi bir seçim içerisine almadığımız $ab = 11$ tablosunun en üst satırının köşelerindeki hücreleri seçeriz. Bu iki köşe değeri yan yana olduğu için seçime iki hücre de katılır. Bu seçimde $ab = 11$ sabittir (çünkü bu hücrelerin $ab = 10$ veya $ab = 01$ tablolarıyla bir ortaklığı yoktur). Satırda ise $cd = 00$ sabitken, sütunda $f = 0$ sabittir. Bu da bize $abc'd'f'$ terimini verir.

Bulduğumuz tüm terimlerin VEYA'sını alırsak $F(a, b, c, d, e, f) = df + b'cd' + abc'd'f'$ sadeleştirmesini elde ederiz.

1.2 Toplamların Çarpımı Sadeleştirmesi

Bir önceki kısımda çarpımların toplamı şeklinde verilmiş ifadelerin kanonik miniterimlerin toplamı formunda ifade edilip Karnaugh haritalarıyla sadeleştirilmesini gördük. Bu kısımda ise toplamların çarpımı formunda verilmiş ifadelerin Karnaugh haritalarıyla sadeleştirilmesini göreceğiz.

Bir önceki kısımda görmüş olduğumuz üzere, Karnaugh haritalarının çalışabilmesini sağlayan temel özellik seçilen iki miniterimde farklılık gösteren tek bir değişken varsa, o değişkenin VEYA işlemi ile elimine edilebilmesiydi. Şimdi bu özelliğin maksiterimler için de geçerli olup olmadığını görmek için sadece bir terimi farklılık gösteren iki maksiterimin VE işlemini alalım:

$$
\begin{aligned}
(x + y' + z)(x + y' + z') &= ((x + y') + z)((x + y') + z') \\
&= (x + y') + z'(x + y') + z(x + y') + zz' \\
&= (x + y')(1 + z' + z) \\
&= (x + y')
\end{aligned}
$$

Görüldüğü üzere sadece tek bir değişkeni farklılık gösteren iki maksiterimin VE işlemi alındığında farklılık gösteren değişken elimine edilmektedir. Buna göre Karnaugh haritalarını toplamların çarpımı şeklinde verilen ifadeleri sadeleştirmek için de kullanabiliriz. Yine tabloları yan yana ve üst üste gelen terimler arasında sadece bir değişken farklı olacak şekilde oluştururuz, fakat bu sefer tablonun hücreleri miniterimleri değil maksiterimleri ifade eder:

xy \ zw	00	01	11	10
00	M_0	M_1	M_3	M_2
01	M_4	M_5	M_7	M_6
11	M_{12}	M_{13}	M_{15}	M_{14}
10	M_8	M_9	M_{11}	M_{10}

Hücreler artık maksiterimleri ifade ettiği için Karnaugh haritasına 1 değerlerini değil, 0 değerlerini koymamız gerekir. Başka bir deyişle fonksiyonun 0 değerini verdiği giriş değerlerine karşılık gelen yerlere 0 değeri yazarız. Örnek olarak $F(x, y, z) = \prod(0, 2, 4, 6) = (x + y + z)(x + y' + z)(x' + y + z)(x' + y' + z)$ fonksiyonuna karşılık gelen doğruluk tablosu aşağıdaki gibi elde edilir:

x \ yz	00	01	11	10
0	0			0
1	0			0

Maksiterimlere dayalı Karnaugh haritalarının sadeleştirilmesinde de yine aynı kurallar uygulanır: Değişiklik gösteren değişkenler elimine edilirken, sabit kalan değişkenler alınır. Buna göre, yukarıdaki tablonun sadeleştirilmesi aşağıdaki gibi olacaktır:

x \ yz	00	01	11	10
0	0			0
1	0			0

Bu seçim için satırda x elenir, sütunda ise $z = 0$ değerinin sabit kaldığı görülür. Buna göre, fonksiyonun sadeleştirilmiş hali $F(x, y, z) = z$ olmalıdır.

Bir önceki ders notunda görmüş olduğumuz üzere $F(x, y, z) = \prod(0, 2, 4, 6)$ ifadesi çarpımların toplamı cinsinden $F(x, y, z) = \sum(1, 3, 5, 7)$ ifadesine eşittir. Karnaugh haritasını bu ifade için kurarsak,

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0		1	1	
1		1	1	

tablosunu elde ederiz ve bu tablo da sonuç olarak yine $F(x, y, z) = z$ ifadesini verir.

Görmüş olduğunuz üzere artık sadeleştirmeleri hem miniterimler hem de maksiterimler cinsinden yapabiliyoruz. Bir Karnaugh haritasında 0 olan değerleri alırsak maksiterimler cinsinden; 1 olan değerleri alırsak da miniterimler cinsinden sadeleştirme yapmış oluruz:

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	1	1	0

Örnek 1.8:

$F(x, y, z) = \prod(0, 2, 5, 7)$ *fonksiyonunu Karnaugh haritasını kullanarak sadeleştiriniz.*

—

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0			0
1		0	0	

Tabloyu ve seçimleri yukarıdaki gibi yaparız. Üstteki seçim için satırda $x = 0$ değeri sabitken, sütunda $z = 0$ değeri sabittir. Bu bize $(x + z)$ terimini verir. Alttaki seçim içinse satırda $x = 1$ sabitken, sütunda $z = 1$ değeri sabittir. Bu ise bize $(x' + z')$ terimini verir.
Bulduğumuz terimlerin VE'sini alırsak sadeleştirmeyi $F(x, y, z) = (x + z)(x' + z')$ şeklinde elde ederiz.

Örnek 1.9:

$F(x, y, z, w) = \sum(0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15)$ *fonksiyonunu Karnaugh haritası ile sadeleştiriniz.*

—

$F(x, y, z, w) = \prod(6, 14)$ alarak sadeleştirmeyi toplamların çarpımı cinsinden daha kolay bir şekilde bulabiliriz. Buna göre Karnaugh haritası aşağıdaki gibi olur:

$xy \backslash zw$	00	01	11	10
00				
01				0
11				0
10				

Tabloda seçim barizdir. Seçim için satırda $y = 1$ sabitken, sütunda $z = 1$ ve $w = 0$ sabittir. Buna göre, sadeleştirme sonucu $F(x, y, z, w) = y' + z' + w$ olacaktır.

Eğer verilen fonksiyon maksiterim olmayan terimler içeriyorsa, o terimleri maksiterime çevirmemiz lazım. Örnek olarak, elimizde üç değişkenli bir fonksiyona ait $x + y'$ terimi olsun. Bu terimde z olmadığı için maksiterim değildir. Bunu maksiterime etkisiz eleman ekleyerek aşağıdaki gibi çeviririz:

$$\begin{aligned} x + y' &= x + y' + zz' \\ &= (x + y') + zz' \\ &= (x + y' + z)(x + y' + z') \end{aligned}$$

Gördüğünüz üzere $x + y'$ teriminin maksideğer eşdeğeri, $x + y'$ ile başlayan tüm maksiterimler olur. Benzer şekilde elimizde sadece x terimi olsaydı önce yy', sonra da oluşan terimlerin her birine zz' ekleyerek x'in maksiterim formu olarak x ile başlayan tüm maksiterimleri elde ederdik.
Buna göre, Karnaugh haritasını maksiterimler cinsinden oluşturduğumuzda, verilen bir terim $x+y'$ gibi maksiterim değilse (uzun uzun işlem yapmak yerine) tabloda x ve y' ($x = 0$ ve $y = 1$) içeren tüm hücrelere 0 yazarız. Çünkü işlem yaparsak o maksiterimleri elde edeceğimizi biliriz. Benzer şekilde, eğer terim sadece x ise $x = 0$ içeren tüm hücrelere 0 yazarız. Bu Bölüm 1.1.1 9. Kural'ın toplamların çarpımı eşdeğeridir.

1.3 Fark Etmez Durumları

Dijital devre tasarımı yaparken çoğu zaman bir giriş kombinasyonuna karşı çıkışın ne olacağı bizi ilgilendirmez. Bu değer 0 da olabilir 1 de olabilir. Bu tür durumlar "fark etmez" durumu olarak adlandırılır ve doğruluk tablosunda X ile gösterilir. Örnek olarak aşağıdaki doğruluk tablosunu inceleyelim:

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	X
0	1	1	0
1	0	0	X
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	X

Yukarıdaki doğruluk tablosunda $(010)_2 = 2$, $(100)_2 = 4$ ve $(111)_2 = 7$ giriş kombinasyonları için çıkış fark etmez değeri almaktadır. Bu kısaca $d(2,4,7)$ notasyonu ile gösterilir. Buna göre, yukarıdaki fonksiyon $F(x,y,z) = \sum(0,1,5)$ ve $d(2,4,7)$ şeklinde ifade edilir. Eğer toplamların çarpımı cinsinden ifade etmek istersek, fonksiyon $F(x,y,z) = \prod(3,6)$ ve $d(2,4,7)$ olarak yazılır.

Fark etmez durumları Karnaugh haritalarında sadeleştirme yapmak için son derece faydalıdır. Yeri geldiğinde 1 yeri geldiğinde 0 alabildiğimiz için Karnaugh haritasına yazmış olduğumuz bir X değerini bir sadeleştirme grubuna dahil ederek daha fazla sadeleştirme yapabiliriz. Eğer X değerleri Karnaugh haritasında boştaysa ve onlara gerek yoksa, fark etmez durumlarını hiçbir gruba dahil etmeyip onları kullanmayabiliriz de.

Örnek 1.10:

$F(x,y,z,w) = \sum(1,5,8,9)$ ve $d(10,11,12,13,14,15)$ fonksiyonunu Karnaugh haritası ile sadeleştirin.

—

1 ve X değerlerini tabloda karşılık gelen yerlere aşağıdaki gibi doldururuz:

$xy \backslash zw$	00	01	11	10
00		1		
01		1		
11	X	X	X	X
10	1	1	X	X

Tabloda sadece 1 değerlerini kullanarak seçim yaparsak fonksiyonu olası en sade haliyle ifade edememiş oluruz ve daha fazla eleman kullanarak devreyi kurarız. Mümkün olan en sade hali elde etmek için X değerlerini tıpkı 1'miş gibi kullanırız ve aşağıdaki gibi iki büyük seçim grubu oluştururuz:

$xy \backslash zw$	00	01	11	10
00		1		
01		1		
11	X	X	X	X
10	1	1	X	X

Dikey seçim için $z = 0$ ve $w = 1$ sabit kalacağından $z'w$ terimini elde ederiz. Diğer seçim için sadece $x = 1$ sabit kalacağından x terimini elde ederiz. Böylelikle, en sade sonuç olarak $F(x, y, z, w) = x + z'w$ buluruz.